

Leçon 151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

[Gou] : *Algèbre et probabilité*, Xavier Gourdon

[Gri] : *Algèbre linéaire*, Joseph Grifone

[Man-Mne] : *Réduction des endomorphismes*, Roger Mansuy, Rached Mneimné

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

I Partie A- Stabilité : différents moyens d'y parvenir [Rom] [Man-Mne] [Gri][Gou]

I.1 Sous-espaces stables, endomorphisme induit [Man-Mne]

■ **Déf 1 (Sous-espace stable) :**

■ **Ex 2 :** L'image et le noyau sont stables.

■ **Ex 3 :** Droites vectorielles et homothéties.

■ **Ex 4 :** Stabilité d'un projecteur

Rem 5 : Motivation par la recherche d'une base adaptée en matrice diagonale par blocs.

■ **Prop 6 :** Si F est stable par u , alors $v(F)$ est stable par $v \circ u \circ v^{-1}$.

■ **Déf 7 (Endomorphisme induit) :**

■ **Ex 8 :** Projecteur, symétrie

■ **Prop 9 :** Si $E = F \oplus G$ avec F et G stables par u , alors $\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}$ et $\pi_u = \text{ppcm}(\pi_{u_F} \pi_{u_G})$.

I.2 Dualité [Rom][Gou]

■ **Déf 10 (Orthogonal) :**

■ **Déf 11 (Transposée) :**

■ **Prop 12 :** F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^T .

App 13 : Soit $x \in E$ tel que $\pi_u = \pi_{u,x}$. Alors $E_{u,x}$ admet un supplémentaire stable par u .

I.3 Orthogonalité [Gri] [Man-Mne] [Rom]

■ **Déf 14 (Orthogonal) :**

■ **Ex 15 :** Exemple numérique ([Gri]).

■ **Déf 16 (Adjoint) :**

■ **Ex 17 :**

■ **Prop 18 (Propriétés de u^*) :**

■ **Prop 19 :** Si F stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .

I.4 Lemme des noyaux

■ **Thm 20 (Lemme des noyaux) :**

■ **Cor 21 (Lemme de Fitting) :**

App 22 (Cône de nilpotence) :

II Partie B - Un petit peu de réduction [Rom] [Man-Mne] [Gri]

■ **Déf 23 (Sous-espace propre) :**

■ **Ex 24 :** Projecteurs et symétries.

■ **Déf 25 (Polynôme caractéristique) :**

■ **Déf 26 (Sous-espace caractéristique) :**

■ **Ex 27 :** χ_A où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

II.1 Réduction simultanée

■ **Déf 28 (Co-diagonalisabilité, trigonalisabilité) :**

■ **Thm 29 (Co-diagonalisation) :**

■ **Ex 30 :** Diagonalisabilité de l'endomorphisme $\Theta_{A,B} : M \rightarrow AMB$.

■ **Thm 31 (Co-trigonalisation) :**

II.2 Décomposition de Dunford

Thm 32 (Dunford) :

Ex 33 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Ex 34 : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

Prop 35 (Décomposition de Dunford de l'exponentielle) :

App 36 : $A \in (\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi e^A l'est.

App 37 : Calcul d'une exponentielle.

III Partie C - Endomorphismes particuliers [Rom][Man-Mne]

III.1 Endomorphismes cycliques

Déf 38 (Endomorphisme cyclique) :

Ex 39 : Un endomorphisme admetant n valeurs propres distinctes est cyclique.

Ex 40 : En dim 2 un endomorphisme est soit une homothétie, soit cyclique.

Prop 41 : Un endomorphisme induit par un endomorphisme cyclique est cyclique.

Prop 42 (Caractérisation par le polynôme minimal) :

Rem 43 : Lien avec les matrices compagnons

Thm 44 (Réduction de Frobenius) :

Ex 45 : Exemples 1.7 et 1.8 ([Man-Mne])

Déf 46 (Invariants) :

App 47 (Similitude et invariants) :

App 48 : On a $n \leq \dim(\mathcal{C}(u)) \leq n^2$.

Thm 49 (Commutant) :

III.2 Une autre utilisation de la dualité [Rom] [Man-Mne]

 **Dév 50 (Jordan) :**

Ex 51 : Voir [Man-Mne].

III.3 Endomorphismes semi-simples

Déf 52 (Endomorphisme semi-simple) :

Ex 53 : Les endomorphismes diagonalisables sont semi-simples.

Thm 54 (Semi-simplicité dans $\mathbb{C}$) :

Prop 55 : Si π_u est irréductible, et si L est son corps de rupture, alors F est un K -ev stable par u ssi F est un L -sev. En particulier, u est semi-simple.

 **Dév 56 (Semi-simplicité et polynôme minimal) :**

Ex 57 : Les rotations sont semi-simples.

App 58 (Dunford généralisé) :

III.4 Endomorphismes normaux

Déf 59 (Endomorphisme normal) :

Ex 60 : Endomorphismes symétriques (hermitiens), anti-symétriques, orthogonaux.

Prop 61 : Si u est normal, alors F est stable ssi $F^\perp$ est stable.

Thm 62 (Réduction des normaux) :